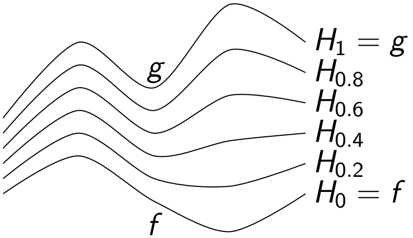
Homotopías entre aplicaciones

Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f **es homótopa a** g si existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in X$.
La aplicación H es una homotopía entre f y g.
Si f es homótopa a g, escribimos $f \sim g$ (o $f \overset{H}{\sim} g$ si queremos especificar la homotopía).
Si $f \sim g$ y g es una aplicación constante, decimos que f es **homotópicamente nula**.

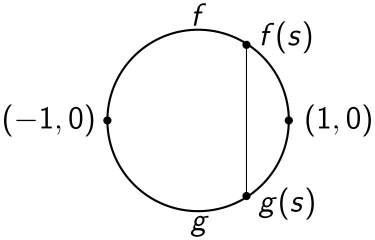
Observacion. Para cada $t \in [0,1]$, la aplicación $H_t : X \longrightarrow Y$, dada por $H_t(x) = H(x,t)$, es una aplicación continua de X a Y, tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.
Así, una homotopía puede verse como una deformación continua de f a g.



Ejemplos de aplicaciones homótopas

i) Sean $f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, $g(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$.
Dado $s \in [-1,1]$, los puntos del segmento que une $f(s)$ y $g(s)$ son de la forma $(1-t)f(s) + tg(s)$, con $t \in [0,1]$.
Sea $H : [-1,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$



Entonces H es continua y cumple

$$H_0(x) = H(x,0) = f(x), H_1(x) = H(x,1) = g(x).$$

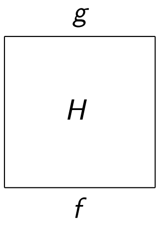
Por tanto f y g son homótópas.

ii) La identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es homotópicamente nula.
Sea $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y) = (x,y)$, $g(x,y) = (0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, los puntos del segmento que une $f(x,y) = (x,y)$ y $g(x,y) = (0,0)$ son de la forma $(1-t)(x,y) + t(0,0) = (1-t)(x,y)$, con $t \in [0,1]$.
Sea $H : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H((x,y),t) = (1-t)(x,y)$.
Entonces H es continua y cumple $H((x,y),0) = (x,y)$ y $H((x,y),1) = (0,0)$.

iii) La identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ no es homotópicamente nula.
Lo demostraremos más adelante. La construcción anterior no vale porque el segmento que une un puntos $(x,0)$ $(x > 1)$ con el punto $(0,0)$ no está contenido en $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$.

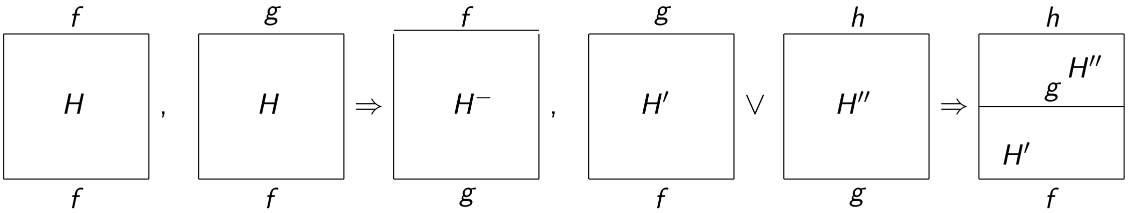
Homotopías entre aplicaciones

Una homotopía entre dos aplicaciones f y g la representaremos gráficamente como



Lema. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración (Idea gráfica).



Homotopías entre aplicaciones

Demostración (Expresión explícita de las homotopías).

a) $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $H(x,t) = f(x)$ es una homotopía de f a f. Así $f \sim f$.

b) Supongamos $f \overset{H}{\sim} g$.
Sea $H^- : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $H^-(x,t) = H(x, 1-t)$, que cumple

$$H^-(x,0) = H(x,1) = g(x) \text{ y } H^-(x,1) = H(x,0) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Por tanto $g \overset{H^-}{\sim} f$.

c) Supongamos $f \overset{H'}{\sim} g$ y $g \overset{H''}{\sim} h$.
Sea $H^- : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ dada por $H(s,t) = \begin{cases} H'(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ H''(x,2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$

Como $H'(x,1) = H''(x,0) = g(x)$, para todo $x \in X$, la aplicación H esta bien definida, y es continua. Además cumple que

$$H(x,0) = H'(x,0) = f(x) \text{ y } H(x,1) = H''(x,1) = h(x), \text{ para todo } x \in X.$$

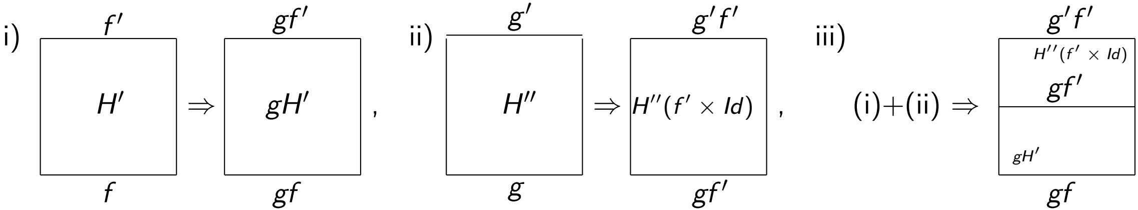
Por tanto $f \overset{H}{\sim} h$.

Homotopías entre aplicaciones

Lema. Sean $f, f' : X \longrightarrow Y$, $g, g' : Y \longrightarrow Z$ tales que $f \sim f'$, $g \sim g'$.
Entonces $gf \sim g'f'$.

Demostración Sea $H' : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $H'_0 = f$, $H'_1 = f'$.
Entonces $gH' : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ cumple $(gH')_0 = gf$, $(gH')_1 = gf$.
Por tanto $gf \sim gf'$.
Por otra parte, si H'' es una homotopía entre g y g', entonces $H(x,t) = H''(f'(x), t)$ es una homotopía entre gf' y $g'f'$. Por tanto $gf' \sim g'f'$.
Finalmente por transitividad, $gf \sim gf' \sim gf'$.

Idea gráfica:



Homotopías relativas

Sean X, Y espacios topológicos, sea $A \subset X$ y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. Decimos que $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ es una **homotopía** entre f y g **relativa** a A, si $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ y $H(a,t) = f(a) = g(a)$ para cada $x \in X$ y cada $a \in A$.

Se denota $f \sim g$ (rel. A), o $f \overset{H}{\sim} g$ (rel. A) si se especifica la homotopía.

Observación. La relación $\sim$ (rel. A) es una relación de equivalencia.

Ejemplos. i) Sea $X = [-1,1]$, $Y = \mathbb{R}^2$ y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ tales que

$$f(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), g(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

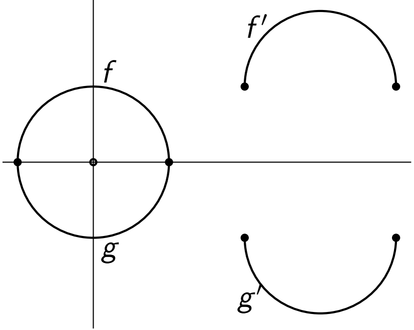
La aplicación H de la sección anterior es una homotopía (rel. $\{-1,1\}$).

ii) Sea ahora $X = [-1,1]$, $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $f, g : X \longrightarrow Y$ tales que

$$f(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), g(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

Entonces f y g son homótopas pero no (rel. $\{-1,1\}$).

Homotopías relativas

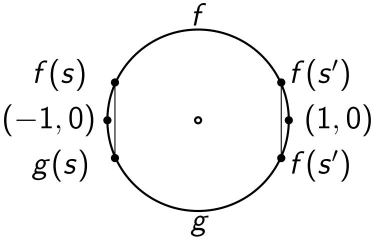


- Para ver que f y g son homótopas, consideramos dos funciones auxiliares $f', g' : X \longrightarrow Y$ dadas por

$f'(x) = (x+3, 1+\sqrt{1-x^2}), g'(x) = (x+3, -1-\sqrt{1-x^2})$

tales que $f \overset{H_1}{\sim} f' \overset{H_2}{\sim} g' \overset{H_3}{\sim} g$, con homotopías "lineales" $H_1(s,t) = (1-t)f(s) + tf'(s)$, $H_2(s,t) = (1-t)f'(s) + tg'(s)$, $H_3(s,t) = (1-t)g'(s) + tg(s)$,

- Para ver que f y g no son homótopas (rel. $\{-1,1\}$), supongamos que existe una H homotopía entre ellas.



Como $H(-1,t) = (-1,0)$ para todo $t \in [0,1]$, si s está cerca de -1, $f(s)$ y $g(s)$ habrán de conectarse siguiendo una trayectoria corta a la izquierda del punto $(0,0)$, y como $H(1,t) = (1,0)$ para todo $t \in [0,1]$, si s' está cerca de 1, $f(s')$ y $g(s')$ habrán de conectarse siguiendo una trayectoria corta a la derecha del punto $(0,0)$.

Existirá entonces $s_0 \in (-1,1)$ tal que $f(s_0)$ y $g(s_0)$ se conectan por la derecha (o la izquierda) del punto $(0,0)$ y puntos arbitrariamente cercanos a s_0 que se conectan por la izquierda (o la derecha) del punto $(0,0)$, y (imposible por continuidad).

Ejercicios

Ejercicio 1. Definir homotopías H entre los siguientes pares de funciones:

a) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $f(x) = (x, x)$ y $g(x) = (0, 0)$.

b) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dadas por $f(x) = (x, 1)$ y $g(x) = (x, -1)$.

Solución: a) $f \overset{H}{\sim} g$ con $H : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H(x,t) = ((1-t)x, (1-t)x)$ que es claramente continua, y cumple $H(x,0) = ((1-0)x, (1-0)x) = (x,x)$ y $H(x,1) = ((1-1)x, (1-1)x) = (0,0)$

b) Calculamos la homotopía H por partes:

$f \overset{H'}{\sim} c_{(1,1)}$ con $H' : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada por $H'(x,t) = ((1-t)x + t, 1)$

$c_{(1,1)} \overset{H''}{\sim} c_{(1,-1)}$ con $H'' : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $H''(x,t) = (1, (1-t) + t(-1))$

$c_{(1,-1)} \overset{H'''}{\sim} g$ con $H''' : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $H'''(x,t) = ((1-t) + tx, -1)$

Por la propiedad transitiva $f \simeq g$ y una homotopía entre f y g viene dada por

$$H : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \text{ si } H(s,t) = \begin{cases} H'(x, 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ H''(x, 3t-1) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ H'''(x, 3t-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicios

Ejercicio 2. Sean $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ dadas por $f(x) = (x, x)$ y $g(x) = (x, -x)$. Sea $A = \{x \in [0, \infty) \mid / f(x) = g(x)\}$. ¿Se cumple que $f \sim g$ (rel A)?

Solución: Se tiene que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x, x) = (x, -x) \Leftrightarrow x = 0$.
Luego $A = \{0\}$ y $f(0,0) = g(0,0) = 0$.
Vemos si $f \overset{H}{\sim} g$ (rel.A) por partes:
$f \overset{H'}{\sim} c_{(0,0)}$ (rel.A) con $H' : [0, \infty) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $H'(x,t) = ((1-t)x, (1-t)x)$
$c_{(0,0)} \overset{H''}{\sim} g$ (rel.A) con $H'' : [0, \infty) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $H'(x,t) = (tx, -tx)$
Por la propiedad transitiva, $f \overset{H}{\sim} g$ (rel.A).

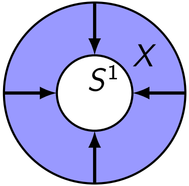
Ejercicio 3. Sean $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ continua. Demuestra que f es homotópicamente nula.

Solución: $f \overset{H}{\sim} c_{f(a)}$ con $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow X$, dada por $H(x,t) = f((1-t)x + ta)$ que está bien definida pues $(1-t)x + ta \in [a,b]$ si $x \in [a,b]$, y cumple que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = f(a)$.

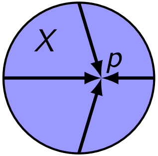
Retracciones

Si $A \subset X$, una **retracción** de X en A es una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Si existe dicha aplicación r, A es un **retracto** de X.

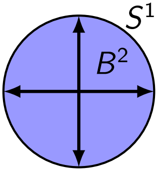
Ejemplos. i) Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ un anillo y sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Sea $r : X \longrightarrow S^1$, dada por $r(x, y) = \dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



Entonces r es una retracción del anillo en su frontera interior.



ii) Sea X un conjunto cualquiera, sea $p \in X$, y sea $r : X \longrightarrow \{p\}$ dada por $f(x) = p$. Entonces r es una retracción de X en $\{p\}$.



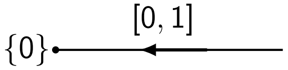
iii) La frontera S^1 de B^2 no es un retracto suyo (lo veremos más adelante). Intuitivamente, siempre va a haber un punto en el interior cuya imagen no es posible definir de forma continua.

Observación. Si $A \subset X$, y $r : X \longrightarrow A$ es continua, r es una retracción de X en A si y solo si $r \circ i_{A,X} = \mathrm{Id}_A$ donde $i_{A,X} : A \longrightarrow X$ es la inclusión.

Retracciones de deformación

Si $A \subset X$, A es un **retracto de deformación** de X si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i_{A,X} \circ r \sim \mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$.
Si además pedimos que $i_{A,X} \circ r \sim \mathrm{Id}_X$ (rel. A), se dice que A es un **retracto de deformación fuerte** de X.

Ejemplos. i) Sea $X = [0,1]$ y sea $A = \{0\} \subset X$.
Sea $r : X \longrightarrow A$ dada por $r(x) = 0$.



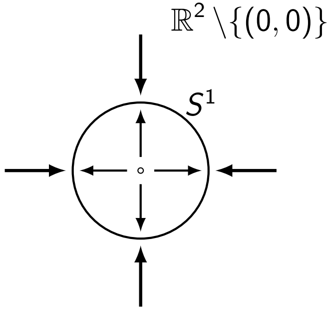
Entonces H dada por $H(x,t) = (1-t)x + t0 = (1-t)x$ es una homotopía (rel. A) de $i_{A,X} \circ r$ a Id_X. Por tanto, A es un retracto de deformación fuerte de X.

ii) Sea $X = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sea
$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

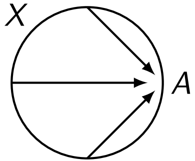
Sea $r : X \longrightarrow S^1$ dada por $r(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^1 + y^2}}(x,y)$.

Entonces
$$H((x,y),t) = \left((1-t) + \frac{t}{\sqrt{x^1+y^2}}\right)(x,y)$$
define una homotopía (rel. A) de $i_{A,X} \circ r$ a Id_X.

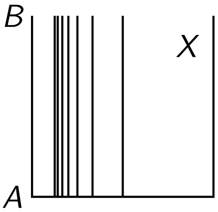
Por tanto, S^1 es un retracto de deformación fuerte de X.



Retracciones de deformación

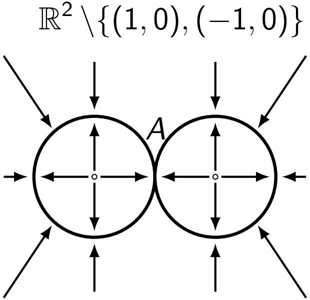


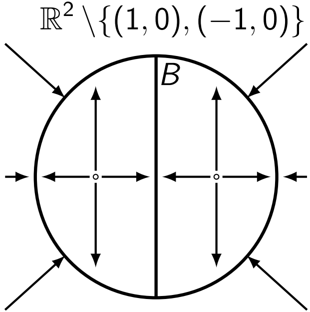
iii) Sea $X = S^1$, y sea $A = \{(1,0)\} \subset S^1$.
Entonces A es un retracto de X pero no es retracto de deformación.



iv) Sea $X = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\} \cup \{(x,y) \mid x = \frac{1}{n} \text{ ó } x = 0, y \in [0,1]\})$. Sea $A = \{(0,0)\} \subset X$ y sea $B = \{(0,1)\} \subset X$.
Entonces A es un retracto de deformación fuerte de X.
Por otra parte, B es un retracto de deformación de X pero no fuerte.

v) Sean $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$, $A = S_1(1,0) \cup S_1(-1,0)$ (unión de dos circunferencias tangentes de radio 1 de centros $(1,0)$ y $(-1,0)$), $B = S_2(0,0) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ (circunferencia de centro $(0,0)$ radio 2 unión el diámetro vertical)
Entonces A y B son retractos de deformación fuerte de X.





Ejercicios

Ejercicio 4. Construye una retracción de deformación fuerte del disco unidad en uno de sus diámetros, y otra del disco en uno de radios.

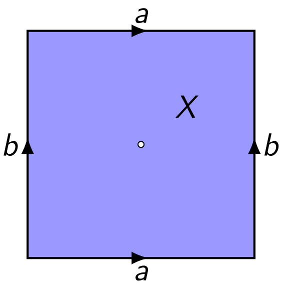
Solución: Sea $D = \{(x, y) \in D^2 \mid y = 0\}$ un diámetro y sea $r : D^2 \longrightarrow D$ dada por $r(x, y) = (x, 0)$.

Entonces r es una retracción de deformación fuerte pues $i_{D,D^2} \circ r \overset{H}{\sim} \mathrm{Id}_{D^2}$ (rel. D), con $H : D^2 \times [0, 1] \longrightarrow D^2$, dada por $H((x, y), t) = (x, (1 - t)y)$, que cumple $H((x, y), 0) = (x, y) = \mathrm{Id}_{D^2}(x, y)$, $H((x, y), 1) = (x, 0) = r(x, y)$, $H((x, 0), t) = (x, 0)$.

Sea $R = \{(x, y) \in D^2 \mid x \geq 0, y = 0\}$ un radio y sea $r : D^2 \longrightarrow R$, $r(x, y) = (|x|, 0)$.

Entonces r es una retracción de deformación fuerte pues $i_{D,D^2} \circ r \overset{H}{\sim} \mathrm{Id}_{D^2}$ (rel. D), con $H : D^2 \times [0, 1] \longrightarrow D^2$, dada por $H((x, y), t) = ((1 - t)x + t|x|, (1 - t)y)$, que cumple $H((x, y), 0) = (x, y) = \mathrm{Id}_{D^2}(x, y)$, $H((x, y), 1) = (|x|, 0) = r(x, y)$, $H((x, 0), t) = (x, 0)$ si $(x, 0) \in R$ ($\Leftrightarrow x \geq 0$).

Ejercicios



Ejercicio 5. Sea $X = [0,1] \times [0,1] \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ el cuadrado unidad al que se le ha suprimido el punto central y sea $A = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1]$.
Sea T el resultado de identificar cada punto $(x,0)$ con el punto $(x,1)$, y cada punto $(0,y)$ con el punto $(1,y)$. y sea S la imagen de A al hacer el conjunto cociente.
¿En qué consisten T y S? ¿Es S un retracto de deformación fuerte de C? En caso afirmativo define una retracción de deformación fuerte de T en S.

Solución: T es un toro agujereado y S son dos curvas simples cerradas con un punto en común.
Veamos que S un retracto de deformación fuerte de T.
Sea $r : X \longrightarrow A$ donde $r(x,y)$ es el único punto de corte, de la semirecta que sale del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y pasa por el punto (x,y), con el conjunto A. Entonces r es compatible con las identificaciones (pues r es la identidad en A y todos los puntos que se identifican están en A), es continua, y es una retracción de deformación fuerte pues $i_{A,X} \circ r \sim \mathrm{Id}_X$ (rel. A) mediante $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$, dada por $H((x,y),t) = (1-t)(x,y) + tr(x,y)$.

Equivalencias de homotopía

Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es una **equivalencia de homotopía** si existe $g : Y \longrightarrow X$ continua tal que $gf \sim \mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ y $fg \sim \mathrm{Id}_Y : Y \longrightarrow Y$.
Dos espacios son **homotópicamente equivalentes** o tienen el **mismo tipo de homotopía** si existe una equivalencia de homotopía entre ellos. Se denota $X \sim Y$.

Proposición. Si A es un retracto de deformación de X, entonces $A \simeq X$.

Demostración. Ver ejercicios.

Teorema. La relación de equivalencia de homotopía es una relación de equivalencia.

Demostración. a) $X \sim X$ (inmediato).
b) $X \sim Y \Leftrightarrow$ existen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ con $gf \sim \mathrm{Id}_X$ y $fg \sim \mathrm{Id}_Y \Leftrightarrow Y \sim X$.
c) $X \sim Y \sim Z \Rightarrow$ existen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$, $f' : Y \longrightarrow Z$, $g' : Z \longrightarrow Y$, tales que $gf \sim \mathrm{Id}_X$, $fg \sim \mathrm{Id}_Y$, $g'f' \sim \mathrm{Id}_Y$, $f'g' \sim \mathrm{Id}_Z \Rightarrow f'f : X \longrightarrow Z$, $gg' : Z \longrightarrow X$ cumplen $(gg')(f'f) = g(g'f')f \sim g\,\mathrm{Id}_Y\, f = gf \sim \mathrm{Id}_X$, y análogamente $(f'f)(gg') \sim \mathrm{Id}_Z$.

Teorema. $X \simeq Y$ (homeomorfos) $\Rightarrow X \sim Y$ (homótopos). El recíproco no es cierto.

Demostración. Inmediata.

X es **contractible** si tiene el tipo de homotopía de un punto.

Ejemplo. $\mathbb{R}$ y $[0, 1]$ son contractibles.

Ejercicios

Ejercicio 6. Demuestra que si A es un retracto de deformación de X, entonces A tiene el mismo tipo de homotopía que X.

Solución: A retracto de deformación de $X \Rightarrow$ existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i_{A,X} \circ r \sim \mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$. Como A es retracción, $r \circ i_{A,X} = \mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$.
Por tanto r es una equivalencia de homotopía.

Ejercicio 7. Demuestra que un espacio es contractible si y solo si la aplicación identidad $\mathrm{Id} : X \longrightarrow X$ es homotópicamente nula.

Solución: X es contractible $\Rightarrow X \sim \{p\} \Rightarrow$ existen $f : X \longrightarrow \{p\}$ y $g : \{p\} \longrightarrow X$ (dada por $g(p) = x_0$) tales que $gf \sim \mathrm{Id}_X$ (con $gf(x) = x_0$ aplicación constante) $\Rightarrow$ la identidad es homotópicamente nula.

Recíprocamente, si $\Rightarrow \mathrm{Id}_X \sim \{c_{x_0}\} \Rightarrow \{x_0\}$ es retracto de deformación de $X \Rightarrow X \sim \{x_0\}$.

Ejercicio 8. Demuestra que un espacio contractible es conexo por caminos.

Solución: Si X es contractible la identidad es homotópicamente nula $\Rightarrow$ existe $x_0 \in X$ y existe $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$, tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$, para todo $x \in X$.

Sea $x_1 \in X$, entonces $\gamma_{x_1}(t)$ dada por $\gamma_{x_1}(t) = H(x_1, t)$ es un camino de x_1 a x_0.
Entonces dados $x_1, x_2 \in X$, $\gamma_{x_1} * \bar{\gamma}_{x_2}$ es un camino de x_1 a x_2.

Ejercicios

Ejercicio 9. Demuestra que X es contractible si y solo para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un retracto de deformación de X.

Solución: Como X es contractible, existe x_0 tal que $\mathrm{Id}_X \sim c_{x_0}$.
Sea $x_1 \in X$. Como X es conexo por caminos, existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ camino de x_0 a x_1.
Entonces $c_{x_0} \sim c_{x_1}$ mediante $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ dada por $H(x,t) = \alpha(t)$.

Así, $\mathrm{Id}_X \sim c_{x_1}$. Esto implica que x_1 es un retracto de deformación de X.

Ejercicio 10. Demuestra que si Y contractible y $f, g : X \longrightarrow Y$ son continuas $\Rightarrow f \sim g$.

Solución: Como Y es contractible, se tiene que $\mathrm{Id}_X \sim C_{y_0}$, con $y_0 \in Y \subset X$.
Entonces, dadas $f, g : X \longrightarrow Y$ se tiene que

$$f = \mathrm{Id}_Y \circ f \sim c_{y_0} \circ f = c_{y_0} = c_{y_0} \circ g \sim \mathrm{Id}_Y \circ g = g.$$

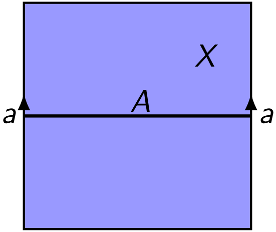
Ejercicio 11. Prueba que un retracto de un espacio contractible es contractible.

Solución: Sea $r : X \longrightarrow A$ una retracción y sea $x_0 \in A$.
Como $x_0 \in X$ que es contractible, se tiene que $\mathrm{Id}_X \sim c_{x_0}$.
Entonces, dadas $f, g : X \longrightarrow Y$ se tiene que

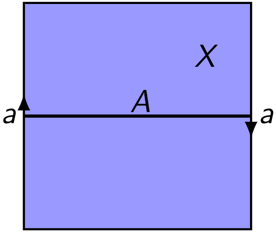
$$\mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_X \circ i_{A,X} \sim c_{x_0} \circ i_{A,X} = c_{x_0}.$$

Ejercicios

Ejercicio 12. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unidad y sea $A = [0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$.



a) Si identificamos cada punto $(0,y)$ con el punto $(1,y)$, el conjunto cociente es un cilindro C. Sea S la imagen de A al hacer el conjunto cociente. ¿En qué consiste S? ¿Es S un retracto de deformación fuerte de C? En caso afirmativo construye una retracción de deformación fuerte de C en S. Se puede definir sobre el cilindro, o, más sencillamente, de X en A de manera que sea compatible con las identificaciones.



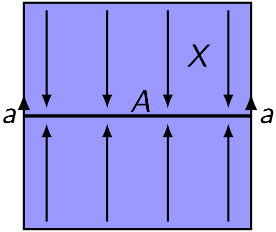
b) Sea ahora M el resultado de identificar cada punto $(0,y)$ con el punto $(1,1-y)$, y sea de nuevo S la imagen de A al hacer el conjunto cociente. ¿En qué consisten M y S? ¿Es S un retracto de deformación fuerte de M? En caso afirmativo construye una retracción de deformación fuerte de M en S, construyendo una de X en A que sea compatible con las identificaciones.

c) ¿Son C y M homotópicamente equivalentes? ¿Crees que son homeomorfos?

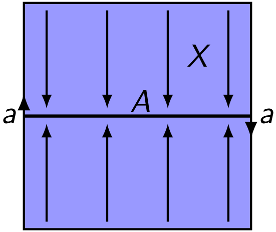
Ejercicios

Solución: Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unidad y sea $A = [0,1] \times \{\frac{1}{2}\}$.

a) Si identificamos cada punto $(0,y)$ con el punto $(1,y)$, X se convierte en un cilindro C, y A en una circunferencia S. Entonces S un retracto de deformación fuerte de C. Podemos definir $r : X \longrightarrow A$ como $r(x,y) = (x, \frac{1}{2})$, que es compatible con las identificaciones (puntos identificados se van en puntos que se identifican también), y es una retracción de deformación fuerte pues $i_{A,X} \circ r \overset{H}{\sim} \mathrm{Id}_X$ (rel. A) mediante $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$, dada por $H((x,y),t) = (x, (1-t)\frac{1}{2} + ty)$



b) Si M es el resultado de identificar cada punto $(0,y)$ con el punto $(1, 1-y)$, M es una banda de Moebius y A se convierte en una circunferencia S que es un retracto de deformación fuerte de M (r y H tienen la misma expresión que en (a)).

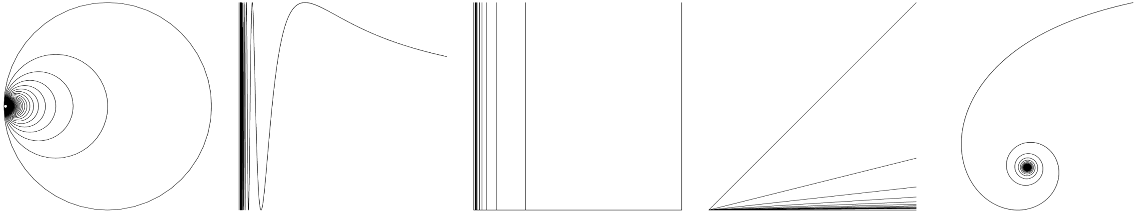


c) C y M son homotópicamente equivalentes pues son ambos homotópicamente equivalentes a una circunferencia.

Aunque con lo que sabemos hasta ahora podríamos ver que no son homeomorfos lo veremos más adelante.

Ejercicios

Ejercicio 13. ¿Cuales de los siguientes espacios compactos son contractibles?



Solución: i) X_1 no es contractible. Si S es la circunferencia exterior, es fácil ver que S es un retracto de X_1. Si X_1 fuera contractible, también lo sería S que sabemos no lo es.

ii) X_2 no es contractible pues por ser compacto contiene al segmento límite vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ y en este caso no es conexo por caminos.

iii) X_3 es contractible. Si $x_0 = (0, 0)$, una retracción de deformación de X_3 a $\{x_0\}$ viene dada por $H((x, y), t) = \begin{cases} H'((x, y), 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H''((x, y), 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$,
con $H'((x, y), t) = (x, (1 - t)y)$, $H''((x, y), t) = ((1 - t)x, 0)$,
pues $H'((x, y), 0) = (x, y)$, $H'((x, y), 1) = H''((x, y), 0) = (x, 0)$, $H''((x, y), 1) = (0, 0)$.

Ejercicios

iv) X_4 es contractible. Si $x_0 = (0,0)$, una retracción de deformación fuerte de X_4 a $\{x_0\}$ viene dada por $H((x,y),t) = ((1-t)x,(1-t)y)$, pues se tiene que $H((x,y),0) = (x,y)$, $H((x,y),1) = (0,0)$.

v) X_5 es contractible pues $f : [0,1] \longrightarrow X_5$ con $f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t\cos(\frac{1}{t}), t\sin(\frac{1}{t})) & \text{si } t > 0 \end{cases}$, es un homeomorfismo entre X_5 y $[0,1]$ (pues es continua, biyectiva y f^{-1} es la función distancia al origen que también es continua).